Espacios $CMO^{2,\rho}$ y sistemas de ondículas

Stella Maris Vaira

Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas - UNL

Seminario Carlos Segovia Fernández - IMAL (Santa Fe)

4 de noviembre de 2016

CMO^q

Definición

Una función f localmente integrable sobre $\mathbb{R}$ se dice que es de oscilación media central de orden q, $1 < q < \infty$, si satisface que:

$$\sup_{R\geq 1}\left(\frac{1}{2R}\int_{[-R,R]}|f(x)-f_R|^q dx\right)^{1/q} < \infty\,, \tag{0.1}$$

donde f_R es el promedio de f sobre $[-R,R]$ dado por $f_R = \frac{1}{|[-R,R]|}\int_{[-R,R]} f(x)\,dx$. Se denota con CMO^q al conjunto de tales funciones, además que el lado izquierdo de la desigualdad es considerada $\|f\|_{\mathrm{CMO}^q}$.

Espacio de Funciones: BMO (bounded mean oscillation)

Fritz John y Louis Nirenberg introdujeron en 1961 los espacios de oscilación media acotada BMO, que surgió para reemplazar al espacio de Lebesgue $L^\infty(\mathbb{R})$ sobre el cual no se comportan bien ciertos operadores y como una herramienta matemática para el estudio de la regularidad de las soluciones de algunos tipos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Definición

Diremos que una función localmente integrable en $\mathbb{R}$, $f \in BMO$ si y sólo si

$$\sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - f_I| dx < \infty,$$

donde el supremo es calculado sobre todos los intervalos (acotados) $I \subset \mathbb{R}$.

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{I \subset \mathbb{R}} \frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - f_I| dx, \qquad f_I = \frac{1}{|I|} \int_I f(y)\, dy.$$

$$BMO^q = BMO, \; 1 \le q < \infty.$$

BMO y CMO^q

La definición dada generaliza el concepto de BMO al reemplazar el intervalo arbitrario I por el intervalo $I = [-R, R]$.

Proposición

Si $1 < q_1 < q_2 < \infty$, entonces $CMO^{q_2} \subset CMO^{q_1}$, y la inclusión es estricta.

La función $f \in CMO^{q_1}$ pero $f \notin CMO^{q_2}$. Sea $1 < q_1 < q_2 < \infty$ y

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{k}{2q_1}} \chi_{A_k}(x) \mathrm{sgn}(x),$$

donde $A_k = \{x \in \mathbb{R} : 2^k \leq |x| < 2^k + 2^{\frac{k}{2}}\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$
Chen, Y.; Lau, K. *Some new classes of Hardy Spaces. Journal of Functional Analysis.*84: 255-278 (1989).

$$BMO^q = \mathrm{BMO} \subset \mathrm{CMO}^q \text{ para todo } q \geq 1.$$

$CMO^{q,\lambda}$

Definición

Dado $\lambda < 1$, $1 < q < \infty$ se define el espacio $CMO^{q,\lambda}$ por la condición:

$$\|f\|_{CMO^{q,\lambda}} := \sup_{R \geq 1} \left(\frac{1}{|I|^{1+\lambda q}} \int_I |f(x) - f_R|^q \, dx \right)^{1/q} < \infty \,,$$

donde f_R es el promedio de f sobre $I = [-R, R]$.

Cuando $\lambda = 0$ obtenemos los espacios CMO^q.

Alvarez, J.; Guzmán Partida, M.; and Lakey, J. *Spaces of bounded $\lambda-$central mean oscillation, Morrey Spaces and $\lambda-$central Carleson measures.* Collect. Math. 51: 1-47 (2000)

$CMO^{q,\lambda}$

Si $\lambda > -1/q$, consideramos la función f definida sobre $\mathbb{R}$ como:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1+\lambda q)/q} 2^{-k/2q} \chi_{A_k}(x) \mathrm{sgn}(x)\,,$$

donde $A_k = \left\{x \in \mathbb{R} :\ 2^k \leq |x| < 2^k + 2^{k/2}\right\}$.
Es fácil mostrar que $f \in \mathrm{CMO}^{q,\lambda}$ pero $f \notin \mathrm{CMO}^{q,\nu}$ para cualquier $\nu < \lambda$.

Espacio de funciones $CMO^{2,\rho}$

Definición

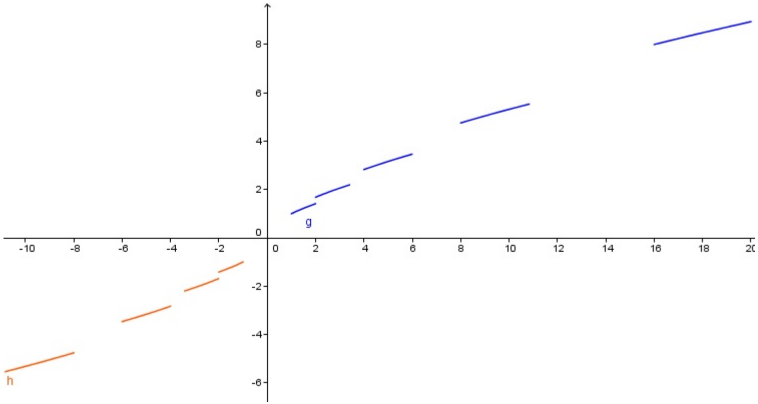
Dada una función ρ positiva, definida en el intervalo $[0,\infty)$ y no decreciente se define el espacio $\mathrm{CMO}^{2,\rho}$ como el conjunto de funciones f localmente integrables que satisfacen:

$$\|f\|_{\mathrm{CMO}^{2,\rho}} = \sup_{R\geq 1} \frac{1}{\rho(|I|)} \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - f_I|^2 dx \right)^{1/2} < \infty \, , I = [-R, R]$$

$CMO^{2,\rho}$ es más general que $CMO^{2,\lambda}$.
Si $\rho(|I|) = |I|^\lambda$, con $0 \leq \lambda < 1$ estamos en la definición del espacio $CMO^{2,\lambda}$ dada por J. Alvarez; J. Lakey; M. Guzmán - Partida (2000).
Al considerar la familia de funciones $\rho(t) = t^\lambda(1 + log^+(t))$ que son de tipo superior $\lambda + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, se tiene que
$CMO^{2,\lambda} \subset CMO^{2,\rho} \subset CMO^{2,\lambda+\varepsilon}$ y estas inclusiones son estrictas.

Funciones ρ - $CMO^{2,\rho}$

Sea la función f que está en $CMO^{2,\rho}$: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho(|x|)2^{k/4}\chi_{A_k}(x)\ \mathrm{sgn}(x)$, donde ρ es positiva, definida sobre $[0, +\infty)$ y creciente. Si $\rho(|I|) = |I|^{\lambda}$, con $0 \leq \lambda < 1 \rightarrow CMO^{2,\lambda}$.



Otro ejemplo es $\rho(t) = t^{\lambda}(1 + log^{+}(t))$

Ondícula

La idea básica de una ondícula es que ella es una función, una adecuada función, que pertenece a un cierto espacio de funciones y que sometida a **dilataciones** y **traslaciones** genera una base ortonormal (u otro tipo de base) en tal espacio.

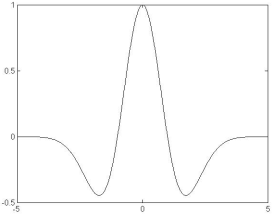


Figura: La ondícula $\psi(x) = (1 - x^2)\, e^{\frac{-x^2}{2}}$

ψ da origen a la base ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$: $\{\psi_{j,k}(\cdot) = 2^{j/2}\psi(2^j \cdot - k)\,; (j,k) \in \mathbb{Z}^2\}$.
Estas ondículas constituyen una base, en un sentido más general, de muchos otros espacios funcionales, el espacio $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$.
La versatilidad de esta base se debe, en parte, a las propiedades de la función ψ.

Ondículas

$$f(x) = \sum_{j,k \in Z} c_{j,k} \psi_{j,k}(x).$$

La señal analógica (función) f se puede **caracterizar** por medio de condiciones en la señal digitalizada $\{c_{j,k}\}$, donde $\{c_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle \,;\, (j,k) \in \mathbb{Z}^2\}$. Los coeficientes $c_{j,k}$, **coeficientes de ondículas**, son la información a manipular, almacenar, transmitir para reconstruir la función.
La función ψ que da origen a $\psi_{j,k}$ es llamada **ondícula madre**.

Vía Ondículas - Caracterización de $L^2(\mathbb{R})$

Teorema

Si $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\sum_{j,k \in Z} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 = \|f\|_2^2$ *para toda* $f \in L^2(\mathbb{R})$;
2. $f = \sum_{j,k \in Z} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$ *con convergencia en* $L^2(\mathbb{R})$ *para toda* $f \in L^2(\mathbb{R})$;
3. ψ *es una ondícula ortonormal, es decir si* $\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k)$; $j, k \in \mathbb{Z}$ *es una base ortonormal para* $L^2(\mathbb{R})$.

Hernández - Weiss. *A first course on wavelets* (2000).

Vía Ondículas - Caracterización de espacios de funciones

Teorema

Sea ψ una ondícula ortonormal tal que $\psi \in \mathcal{R}^0$. Si $1 < p < \infty$, existen constantes A_p y B_p, $0 < A_p \leq B_p < \infty$ tal que:

$$A_p \, \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|\mathcal{W}_\psi \, f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq B_p \, \|f\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R})$.

Apropiadas bases de ondículas proveen la caracterización de $L^p(\mathbb{R})$, para $p \in (1, \infty)$. Dadas dos funciones f y ψ para las cuales tiene sentido el producto escalar $\langle f, \psi \rangle$, definimos:

$$(\mathcal{W}_\psi \, f)(x) \quad = \quad \left\{ \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \, 2^j \, \chi_{\left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right)}(x) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Vía Ondículas - Caracterización de espacios de funciones

Definición

Decimos que una función ψ definida sobre $\mathbb{R}$ pertenece a la clase $\mathcal{R}^0$ de regularidad si existen constantes positivas c_0, c_1, γ y ϵ tales que:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, dx = 0\,;$$

$$|\psi(x)| \leq \frac{c_0}{(1+|x|)^{2+\gamma}}\,, \text{para todo } x \in \mathbb{R}\,;$$

$$|\psi'(x)| \leq \frac{c_1}{(1+|x|)^{1+\epsilon}}\,, \text{para todo } x \in \mathbb{R}\,.$$

El resultado muestra que si ψ es una ondita ortonormal, $\psi \in \mathcal{R}^0$, entonces $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ es una base para $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$; y además se tendría

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \approx \|\mathcal{W}_\psi f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

$BMO(\rho)$

Definición

Sea ρ una función no decreciente, $\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, definiremos al espacio de funciones $BMO(\rho)$ como la clase de las funciones localmente integrables f, para la cual existe una constante C tal que

$$\frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - f_I| dx \leq C\rho(|I|),$$

para cada intervalo (acotado) $I \subset \mathbb{R}$.

$\|f\|_{BMO(\rho)}$ será el ínfimo de todas las constantes C.

Espacio de sucesiones: tipo Carleson $C(\rho)$

Dada una función no decreciente $\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, se define el espacio

$$C(\rho) = \left\{ c = \{c_J\}_{J\in\mathcal{D}},\ \text{existe A} \sum_{\substack{J\subset I\\ J\in\mathcal{D}}} c_J^2 \leq A\rho^2(|I|)|I|, \text{para cada I} \right\}.$$

$\mathcal{D}$ es la clase de intervalos diádicos $J_{j,k} = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{(k+1)}{2^j}\right]$, $j, k \in Z$, $J \in \mathcal{D} \leftrightarrow J_{j,k}$.
Denotaremos con $\|c\|_{C(\rho)}$ al ínfimo de tales constantes A, así

$$C(\rho) = \{c = \{c_J\} : \|c\|_{C(\rho)} < \infty\}.$$

Caracterización de espacios de funciones vía ondículas - Antecedentes

H. Aimar y A. Bernardis (1997) - Caso de ondículas de Daubechies (Ondículas ortonormales de soporte compacto, con grado fijo de suavidad).

Teorema

Sea $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in Z}$ *la base de ondículas de Daubechies y sea* $\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *una función no decreciente que satisface* $\rho(2t) \leq k\rho(t)$ *para alguna constante* k *y todo* $t > 0$*. Si* $f \in BMO(\rho)$*, entonces* $c = \{c_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k}\rangle\}_{j,k\in Z} \in C(\rho)$ *y*

$$\|c\|_{C(\rho)} \leq C\|f\|_{BMO(\rho)}.$$

Caracterización de espacios de funciones vía ondículas - Antecedentes

H. Aimar y A. Bernardis (1997)

Teorema

Sea $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in Z}$ *la base de ondículas y sea* $\rho = A + \tilde{\rho}$*, donde* $A \geq 0$ *y* $\tilde{\rho}$ *es una función de crecimiento tal que* $\int_1^\infty \frac{\tilde{\rho}(s)}{s^2}\, ds < \infty$*. Sea* $c = \{c_{j,k}\}_{j,k\in Z}$ *una sucesión de números reales que pertenecen a* $C(\rho)$*. Entonces la serie* $\sum_{j,k\in Z} c_{j,k}\psi_{j,k}$*, converge en el sentido de la topología débil* de* $BMO(\eta)$ *a una función de* $BMO(\eta)$*; donde* $\eta(t) = t\int_t^\infty \frac{\rho(s)}{s^2}\, ds$*.*

Una función $\tilde{\rho}$ es de crecimiento si es positiva, no decreciente, $\tilde{\rho}(t)$ tiende a 0 cuando t tiende a ∞ y es de tipo superior finito.

Caracterización de espacios de funciones vía ondículas - Antecedentes

E. Harboure; O, Salinas; B. Viviani (2008) - $BMO_\rho(w)$

$$\|f\|_{BMO_\rho(w)} = \sup_{I\subset\mathbb{R}} \frac{1}{w(I)\rho(|I|)} \int_I |f(x) - f_I|dx < \infty.$$

Definición

Decimos que una función ψ definida sobre $\mathbb{R}$ pertenece a la clase $\mathcal{R}^\tau$ con $\tau \geq 1$ de regularidad y ψ será una ondícula ortonormal si se satisfacen las siguientes condiciones:

(A) $\int_{\mathbb{R}} x^n \psi(x)\, dx = 0\,,\ 0 \leq n \leq [\tau] - 1;$

(B) $|\psi(x)| \leq \frac{c}{(1+|x|)^{1+[\tau]+\delta}}\,;$

$|\psi^{(n)}(x)| \leq \frac{c}{(1+|x|)^{[\tau]+\delta}}\ x \in \mathbb{R}\,;$ para $c, \delta > 0$ y $0 \leq n \leq [\tau]$.

(C) El sistema

$$B = \{\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k); (j,k) \in \mathbb{Z}^2\}$$

es una base ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$.

Clase de coeficientes de ondículas

La sucesión de números $\{c_J\}_{J\in\mathcal{D}}$ se dice que pertenece a la clase $C_\rho(w)$ cuando existe una constante A tal que

$$\sum_{\substack{J\subset I\\ J\in\mathcal{D}}} c_J^2\frac{|J|}{w(J)} \leq A\rho(|I|)^2 w(I).$$

La raíz cuadrada del ínfimo de tales constantes A será $\|\{c_J\}\|_{C_\rho(w)}$.

E. Harboure; O, Salinas; B. Viviani (2008) - $BMO_\rho(w)$

Teorema

Sea w un peso en A_q (Muckenhoupt), con $1 \leq q < 2$ y ρ una función no negativa, no decreciente, definida en $[0, +\infty)$, tal que $\int_1^\infty \frac{\rho(s)}{s^{3-q}}\, ds < \infty$. Si $f \in BMO_\rho(w)$, entonces el conjunto de coeficientes de ondículas de f: $\{\langle f, \psi_J\rangle\}_{J\in\mathcal{D}}$ está en $C_\eta(w)$ con $\eta(t) = t^{2-q}\int_t^\infty \frac{\rho(s)}{s^{3-q}}\, ds$. Mas aún, existe una constante C, que no depende de f, tal que

$$\|\{\langle f, \psi_J\rangle\}_{J\in\mathcal{D}}\|_{C_\eta(w)} \leq C\|f\|_{BMO_\rho(w)}.$$

Teorema

Sea w un peso en A_q, con $1 \leq q < 2$ y ρ una función no negativa, no decreciente, definida en $[0, +\infty)$, cóncava y de tipo superior α con $0 \leq \alpha < 2 - q$. Sea ψ una ondícula ortonormal en $\mathcal{R}^\tau$ con $q < \tau$. Si $\{c_J\}_{J\in\mathcal{D}} \in C_\rho(w)$, entonces la serie $\sum_{J\in\mathcal{D}} c_J\psi_J$ converge en el sentido de la topología débil de $BMO_\rho(w)$ a f en $BMO_\rho(w)$. Más aún existe una constante C, $\|f\|_{BMO_\rho(w)} \leq C\|\{c_J\}_{J\in\mathcal{D}}\|_{C_\rho(w)}$*

Espacio de funciones $CMO^{2,\rho}$

Definición

Dada una función ρ positiva, definida en el intervalo $[0,\infty)$ y no decreciente se define el espacio $\mathrm{CMO}^{2,\rho}$ como el conjunto de funciones f localmente integrables que satisfacen:

$$\|f\|_{\mathrm{CMO}^{2,\rho}} = \sup_{R\geq 1} \frac{1}{\rho(|I|)} \left(\frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - f_I|^2 dx \right)^{1/2} < \infty \, , I = [-R, R]$$

Definición

Diremos que ψ es una ondita ortonormal en $\mathcal{R}^0$ si las siguientes condiciones se satisfacen:
(A) Momentos de orden cero nulo: $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, dx = 0$.
(B) Decaimiento y suavidad: existen constantes C_0 y C_1, $\varepsilon > 0$, tales que:

$$\begin{array}{lll} (B_1) & |\psi(x)| \leq \frac{C_0}{(1+|x|)^{2+\varepsilon}} & \text{para todo } x \in \mathbb{R}, \\ (B_2) & |\psi'(x)| \leq \frac{C_1}{(1+|x|)^{1+\varepsilon}} & \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

(C) El sistema

$$B = \{\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k); (j,k) \in \mathbb{Z}^2\}$$

es una base ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$.

Lemarié-Meyer, gaussiana, Daubechies.

$CV^{2,\rho}$

Para cada (j,k) la función $\psi_{j,k}$ es obtenida a partir de ψ por una traslación y una dilatación que transforma el intervalo unitario $[0,1]$ en $J_{j,k} = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$. $\mathcal{D}$ familia de intervalos diádicos, $\{\psi_J\}_{J\in\mathcal{D}}$ sistema de ondículas y $\{c_J\}_{J\in\mathcal{D}}$ será $c_J = \langle f, \psi_J\rangle$, para f localmente integrable.

Definición

Dada ρ definida como antes y una sucesión de números $\{c_J\}_{J\in\mathcal{D}}$ se dice que pertenece a la clase $CV^{2,\rho}$ si existe una constante C tal que para cualquier intervalo $I = [-R, R]$, $R \geq 1$ se cumple que

$$\sum_{\substack{J\subset I\\ J\in\mathcal{D}}} c_J^2 \leq C\rho^2(|I|)|I|.$$

La raíz cuadrada del ínfimo de tales constantes C será $\|\{c_J\}\|_{CV^{2,\rho}}$.

Resultados Principales - Teorema A

Teorema

Sea ρ una función no decreciente tal que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\rho(s)}{s^2}\,ds < \infty$. Si $f \in CMO^{2,\rho}$, entonces los coeficientes de ondícula de f, $\{\langle f, \psi_J\rangle\}_{J\in\mathcal{D}}$, están en $CV^{2,\eta}$ con

$$\eta(s) = s\int_s^\infty \frac{\rho(t)}{t^2}\,dt.$$

Mas aún, existe una constante C, que no depende de f, tal que

$$\left\|\{\langle f, \psi_J\rangle\}_{J\in\mathcal{D}}\right\|_{CV^{2,\eta}} \leq C\|f\|_{CMO^{2,\rho}}.$$

Resultados Principales - Teorema B

Teorema

Sea ρ una función no decreciente, cóncava y de tipo superior $\alpha < 1$. Sea ψ una ondícula que satisface las condiciones (A), (B_1) y (B_2) y (C) dadas con $\max\{0, \alpha - \frac{1}{2}\} < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Si $\{a_J\}_{J\in\mathcal{D}} \in CV^{2,\rho}$, entonces la serie $f = \sum_{J\in\mathcal{D}} a_J \psi_J$ converge en el sentido de la topología débil $*$ de $CMO^{2,\rho}$ a f. Mas aún existe una constante C, tal que

$$\|f\|_{CMO^{2,\rho}} \leq C \left\|\{a_J\}_{J\in\mathcal{D}}\right\|_{CV^{2,\rho}}.$$

Demostración del Teorema A

Suponemos $\|f\|_{CMO^{2,\rho}} = 1$, $I = [-R, R]$, $R \geq 1$. Para cada entero ℓ no negativo: $I_\ell = 2^\ell[-R, R] = [-R\,2^\ell, R\,2^\ell]$, con $I_0 = I$

$$f_\ell = (f - f_I)\mathcal{X}_{I_\ell - I_{\ell-1}}\,;\ell \geq 1$$

y

$$f_0 = (f - f_I)\mathcal{X}_I.$$

Entonces

$$f - f_I = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_\ell.$$

Demostración del Teorema A

Dado que las ψ_J tienen promedio nulo

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{J\subset I\\ J\in\mathcal{D}}} |\langle f-f_I,\psi_J\rangle|^2 = \sum_{\substack{J\subset I\\ J\in\mathcal{D}}} |\langle f,\psi_J\rangle|^2 &\leq C\sum_{\substack{J\subset I\\ J\in\mathcal{D}}}\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}|\langle f_\ell,\psi_J\rangle|^2\right)\\
&\leq C\sum_{\substack{J\subset I\\ J\in\mathcal{D}}}\sum_{\ell=2}^{\infty}|\langle f_\ell,\psi_J\rangle|^2 + C\sum_{\substack{J\subset I\\ J\in\mathcal{D}}}\sum_{\ell=0}^{1}|\langle f_\ell,\psi_J\rangle|^2\\
&= I+II.
\end{aligned}$$

Debemos estimar tanto I como II.

Demostración del Teorema A

Ya que $f \in CMO^{2,\rho}$, se tiene que,
para $\ell = 0$

$$\int_{\mathbb{R}} |f_0(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_I|^2 \mathcal{X}_I(x)\, dx = \int_I |f(x) - f_I|^2\, dx \leq C|I|\rho^2(|I|),$$

para $\ell = 1$

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f_1(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \leq C|I|^{1/2}\rho(|2I|) + 2^2\, |I|^{1/2}\rho(|2I|),$$

para $\ell \geq 2$

$$\begin{aligned} \|f_\ell\|_2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} |f_\ell(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{I_\ell} |f(x) - f_{I_\ell}|^2\, dx\right)^{1/2} + |I_\ell|^{1/2}|f_{I_\ell} - f_{I_{\ell-1}}| + \ldots + |I_\ell|^{1/2}|f_{I_2} - f_I|. \end{aligned}$$

Demostración del Teorema A

Veamos qué se puede decir de $|f_{I_k} - f_{I_{k-1}}|$.

$$\begin{aligned} |f_{I_k} - f_{I_{k-1}}| &= \left| \frac{1}{|I_{k-1}|} \int_{I_{k-1}} (f(x) - f_{I_k}) dx \right| \\ &\leq 2 \left(\frac{1}{|I_k|} \int_{I_k} |f_{I_k} - f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C\rho(|I_k|). \end{aligned}$$

Así

$$\|f_\ell\|_2^2 \leq C|I_\ell| \left(\sum_{i=2}^{\ell} \rho(|I_i|) \right)^2, \ \ell \geq 2$$

Demostración del Teorema A

Reescribimos I vía desigualdad de Cauchy - Schwartz

$$I \leq C \sum_{\substack{J \subset I \\ J \in \mathcal{D}}} \left(\sum_{\ell=2}^{\infty} \left(\int |f_\ell|^2 \right) \left(\int |\psi_J|^2 \right) \right).$$

Por otro lado, dado un intervalo $J = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{(k+1)}{2^j}\right] \subset I$ y con $\ell \geq 2$, ya que ψ satisface (B_1), propiedad de decaimiento, para algún $2 + \varepsilon > 2$

$$\int_{I_\ell - I_{\ell-1}} |\psi_J(x)|^2 \, dx \quad \leq \quad C \frac{1}{2^{3j} |I_\ell|^3} \leq C \left(\frac{|J|}{|I_\ell|} \right)^3, |J| = \frac{1}{2^j}$$

Demostración del Teorema A

Seguimos con la estimación de I

$$
\begin{aligned}
I &\leq C \sum_{\substack{J\subset I\\ J\in\mathcal{D}}} \left(\sum_{\ell=2}^{\infty} |I_\ell| \left(\sum_{i=2}^{\ell} \rho(|I_i|) \right)^2 \left(\frac{|J|}{|I_\ell|} \right)^3 \right) \\
I &\leq C \sum_{\substack{J\subset I\\ J\in\mathcal{D}}} |J|^3 \left(\sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{1}{|I_\ell|^2} \left(\sum_{i=2}^{\ell} \rho(|I_i|) \right)^2 \right).
\end{aligned}
$$

Consideramos por separado y estimamos $\sum_{\substack{J\subset I\\ J\in\mathcal{D}}} |J|^3 \leq C_1 |I|^3$.

$$
\sum_{i=2}^{\ell} \rho(2^i|I|) \leq \int_{4|I|}^{2^{l+1}|I|} \frac{\rho(t)}{t}\, dt
$$

Demostración del Teorema A

$$
\begin{aligned}
\sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{1}{|I_\ell|}\left(\sum_{i=2}^{\ell} \rho(2^i|I|)\right) &\leq 2\sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{1}{2^\ell|I|} \int_{2|I|}^{2^{\ell+1}|I|} \frac{\rho(t)}{t}\,dt \\
&\leq \sum_{\ell=2}^{\infty} \int_{2^\ell|I|}^{2^{\ell+1}|I|} \frac{1}{(2^\ell|I|)^2}\left(\int_{2|I|}^{2^{\ell+1}|I|} \frac{\rho(t)}{t}\,dt\right) ds \\
&\leq C\sum_{\ell=2}^{\infty} \int_{2^\ell|I|}^{2^{\ell+1}|I|} \frac{1}{s^2}\left(\int_{2|I|}^{2s} \frac{\rho(t)}{t}\,dt\right) ds \\
&\leq \int_{|I|}^{\infty} \frac{1}{s^2} \int_{|I|}^{2s} \frac{\rho(t)}{t}\,dt\,ds.
\end{aligned}
$$

Así, finalmente

$$
I \leq C_1|I|^3\left(\int_{|I|}^{+\infty} \frac{\rho(t)}{t^2}\,dt\right)^2 = C|I|\left(|I|\int_{|I|}^{+\infty} \frac{\rho(t)}{t^2}\,dt\right)^2 = C|I|\eta^2(|I|).
$$

Demostración del Teorema A

Procedemos a estimar II, recordando

$$(\mathcal{W}_\psi f)(x) = \left\{ \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \psi_J\rangle|^2 2^j \mathcal{X}_J(x) \right\}^{1/2} \text{; con } J = J_{j,k} = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right].$$

Sea ψ una ondícula tal que $\psi \in \mathcal{R}^0$, dada $p \in (1, +\infty)$, existe una constante $B_p < \infty$ tal que:

$$\|\mathcal{W}_\psi f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq B_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \forall f \in L^p(\mathbb{R}),$$

Demostración del Teorema A

Considerando el término para $\ell = 0$ de II resulta

$$\left(\sum_{J \in \mathcal{D}} |\langle f_0, \psi_J \rangle|^2 \, |J|^{-1} \, \mathcal{X}_J \right)^{1/2} = \mathcal{W}_\psi f_0.$$

Así, para $\ell = 0$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{J \subset I \\ J \in \mathcal{D}}} |\langle f_0, \psi_J \rangle|^2 &\leq C \int_I \sum_{J \in \mathcal{D}} \frac{|\langle f_0, \psi_J \rangle|^2}{|J|} \mathcal{X}_J(x) \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{W}_\psi f_0(x)|^2 \, dx, \end{aligned}$$

y esta última integral está acotada por $B_2 \| f_0 \|^2_{L^2(\mathbb{R})}$.

Demostración del Teorema A

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{J\subset I\\ J\in\mathcal{D}}} |\langle f_0,\psi_J\rangle|^2 &\leq C\int_I |f(x)-f_I|^2\,dx \\
&\leq C\rho(|I|)^2|I| \\
&\leq C\eta(|I|)^2|I|.
\end{aligned}$$

De manera similar se procede para $\ell = 1$.
De las dos estimaciones obtenidas para I y II concluimos

$$\sum_{\substack{J\subset I\\ J\in\mathcal{D}}} |\langle f,\psi_J\rangle|^2 \leq C\eta(|I|)^2|I|.$$

Demostración del Teorema B

Asumimos que

$$\|\{a_{j,k}\}\|_{CV^{2,\rho}} = 1.$$

Probamos primero que

$$f^N = \sum_{j=-N}^{N} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j,k}\,\psi_{j,k} \in CMO^{2,\rho} \text{ para cada } N \in \mathbb{N},$$

con norma independiente de N.
Sea $I = [-r_0, r_0]$ y sea $d \in \mathbb{Z}$, tal que $2^{-d} \leq r_0 < 2^{-d+1}$, con la notación habitual $J_{j,k} = \left[\frac{k}{2^j}; \frac{k+1}{2^j}\right]$; $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$, consideramos la partición de $\mathbb{Z}^2$ dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= \left\{(j,k) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tal que } |J_{j,k}| > 2^{-d} \text{y } J_{j,k} \cap 2I \neq \emptyset\right\},\\
\mathcal{I}_2 &= \left\{(j,k) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tal que } |J_{j,k}| \leq 2^{-d} \text{y } J_{j,k} \cap 2I \neq \emptyset\right\},\\
\mathcal{I}_3 &= \left\{(j,k) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tal que } |J_{j,k}| > 2^{-d} \text{y } J_{j,k} \cap 2I = \emptyset\right\},\\
\mathcal{I}_4 &= \left\{(j,k) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tal que } |J_{j,k}| \leq 2^{-d} \text{y } J_{j,k} \cap 2I = \emptyset\right\}.
\end{aligned}$$

Demostración del Teorema B

De acuerdo a esa partición, descomponemos

$$f^N = f_1^N + f_2^N + f_3^N + f_4^N,$$

donde

$$f_i^N(x) = \sum_{\substack{(j,k)\in\mathcal{I}_i \\ |j|\leq N}} a_{j,k}\,\psi_{j,k}(x)\,; \quad i = 1,2,3,4.$$

Parte 1. Notar que $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ contienen sólo un número finito de elementos y por lo tanto $f_1^N(x)$ y $f_2^N(x)$ son finitas para cada $x \in I$.
Estudiamos la finitud de $f_3^N(x)$ y $f_4^N(x)$.

Demostración del Teorema B

Finitud de $f_3^N(x)$:
Si $x_{j,k}$ el centro del intervalo $J_{j,k}$ y $(j,k) \in \mathcal{I}_3$, entonces $j < d$, pues $|J_{j,k}| = \frac{1}{2^j} > \frac{1}{2^d}$.
Además, $J_{j,k} = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right] \subseteq \left[-\frac{|k|+1}{2^j}, \frac{|k|+1}{2^j}\right] = H_{j,k}$, que es un intervalo centrado en 0.
De la pertenencia a $CV^{2,\rho}$ de la sucesión $\{a_{j,k}\}$ tenemos

$$|a_{j,k}|^2 \leq C\,|H_{j,k}|\,\rho^2(|H_{j,k}|).$$

En consecuencia, para $x \in I$

$$|f_3^N(x)|^2 \leq \sum_{\substack{(j,k)\in\mathcal{I}_3 \\ |j|\leq N}} |a_{j,k}|^2 |\psi_{j,k}|^2 \leq C \sum_{\substack{(j,k)\in\mathcal{I}_3 \\ |j|\leq N}} |H_{j,k}|\rho^2(|H_{j,k}|)|\psi_{j,k}(x)|^2\,.$$

Demostración del Teorema B

Propiedades de la ondícula (decaimiento con $r = 1 + \varepsilon > 1$) , ρ tipo superior α, se logra la estimación

$$|f_3^N(x)|^2 \quad \leq \quad r_0^{2r}\, \rho^2(r_0)\, C \sum_{-N \leq j \leq d} \frac{1}{2^{j2r}} < \infty.$$

Ahora analicemos la finitud de $f_4^N(x)$ con $x \in I$. Para ello usaremos las condiciones de $CV^{2,\rho}$ para los coeficientes y las hipótesis sobre ψ para probar al mismo tiempo finitud y una estimación; recordando que $|J_{j,k}| < 2^{-d}$ entonces $j > d$. Luego

$$\int_I |\psi_{j,k}(x)|^2\, dx \quad \leq \quad C \int_I \frac{2^j}{(1 + |2^j x - k|)^{2r+2}}\, dx \leq \tilde{C}\, \frac{2^j r_0}{|k|^{2r+2}};\ \text{para algún } r > 1$$

y con $|2^j x - k| \geq |k| - 2^j |x| \geq |k| - 2^j r_0 > \frac{|k|}{2}$.
Ahora si, estimamos y acotamos

$$\int_I |f_4^N(x)|^2\, dx.$$

Demostración del Teorema B

Resulta entonces

$$\int_I |f_4^N(x)|^2\, dx \quad \leq \quad C\,|I|\,\rho^2(|I|).$$

Esta estimación implica, en particular, la finitud de $f_4^N(x)$ para casi todo $x \in I$.

$$|f_3^N(x)|^2 \quad \leq \quad r_0^{2r}\,\rho^2(r_0)\, C \sum_{-N\leq j\leq d} \frac{1}{2^{j2r}} < \infty.$$

Demostración del Teorema B

Parte 2. Ahora veremos que existe una constante C, dependiendo sólo de las constantes relacionadas a las condiciones del espacio $CV^{2,\rho}$ y a ρ tal que

$$\left(\int_I \left|f^N(x) - f_1^N(0) - f_3^N(0)\right|^2 dx\right)^{1/2} \leq C\,|I|\,\rho^2(|I|).$$

Tales estimaciones implicarán que $f^N \in \mathrm{CMO}^{2,\rho}$ con normas acotadas uniformemente. Para este propósito consideraremos la desigualdad

$$\begin{aligned}\left(\int_I \left|f^N(x) - f_1^N(0) - f_3^N(0)\right|^2 dx\right)^{1/2} &\leq \left(\int_I \left|f_1^N(x) - f_1^N(0)\right|^2 dx\right)^{1/2} \\ &+ \left(\int_I |f_2^N(x)|^2\, dx\right)^{1/2} + \left(\int_I |f_3^N(x) - f_3^N(0)|^2\, dx\right)^{1/2} \\ &+ \left(\int_I |f_4^N(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \\ &= I + II + III + IV.\end{aligned}$$

Demostración Teorema B

En primer lugar notemos que IV ya fue estimado cuando abordamos analizar su finitud. Así, tenemos

$$IV = \left(\int_I |f_4^N(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \leq C(|I|\rho^2(|I|))^{1/2}.$$

Veamos ahora la estimación de I, Condiciones de suavidad de ψ, Teorema del Valor Medio para funciones de variable real, además $\{a_{j,k}\} \in CV^{2,\rho}$ tenemos $\sum_{(j,k)\in\mathcal{I}_1} |a_{j,k}|^2 \leq C\,|I_j|\,\rho^2(|I_j|)$

$$I = \left(\int_I \left| f_1^N(x) - f_1^N(0) \right|^2 \, dx \right)^{1/2} \quad \leq \quad C\,|I|^{1/2} \left(|I|^2 \int_{|I|}^{\infty} \frac{\rho^2(t)}{t^3} \, dt \right)^{1/2} \leq C\,|I|^{1/2}\,\rho(|I|).$$

Demostración Teorema B

Las condiciones de ortonormalidad de la base de ondículas, nos permitirán obtener una estimación de II

$$II = \left(\int_I \left| f_2^N(x) \right|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_I \left| \sum_{\substack{(j,k)\in\mathcal{I}_2 \\ |j|\le N}} a_{j,k}\, \psi_{j,k}(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} = C \left(\sum_{\substack{(j,k)\in\mathcal{I}_2 \\ |j|\le N}} \left| a_{j,k} \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Del hecho que $J_{j,k} \subseteq 4I$, para $(j,k) \in \mathcal{I}_2$, la condición $CV^{2,\rho}$ y el tipo superior α para ρ obtenemos

$$\sum_{\substack{(j,k)\in\mathcal{I}_2 \\ |j|\le N}} \left| a_{j,k} \right|^2 \le C \, |I| \, \rho^2(|I|),$$

así resulta que

$$II = \left(\int_I |f_2^N(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \le C|I|^{\frac{1}{2}} \rho(|I|).$$

Demostración Teorema B

Para estimar III

$$\begin{aligned} III^2 &= \int_I \left| f_3^N(x) - f_3^N(0) \right|^2 dx \\ &= \int_I \left(\sum_{\substack{(j,k)\in\mathcal{I}_3 \\ |j|\leq N}} |a_{j,k}|\, |\psi_{j,k}(x) - \psi_{j,k}(0)| \right)^2 dx\,. \end{aligned}$$

Recordar que

$$|a_{j,k}| \leq \left(\frac{|k|}{2^j}\right)^{\frac{1}{2}} \rho\left(\frac{|k|}{2^j}\right).$$

Aplicar el Teorema del Valor Medio y la propiedad de decaimiento de la ondita ψ tenemos

$$III^2 \leq C\, r_0^{2-2\varepsilon}\, \rho^2(r_0)\, \frac{1}{(|I|^{1/2-\varepsilon})^2} \leq C\, r_0\, \rho^2(r_0) \leq C\, |I|\, \rho^2(|I|).$$

Así $\{f^N\}$ son sucesiones uniformemente acotadas en $\mathrm{CMO}^{2,\rho}$.

Demostración Teorema B

Parte 3. La etapa final será mostrar que $\{f^N\}$ converge a f de $\mathrm{CMO}^{2,\rho}$ en el sentido de la topología débil*.
Bastará ver que para toda $g \in HA^{2,\phi}$ $\langle f^N, g\rangle \to_{N\to\infty} \langle f, g\rangle$.
Entonces existe f en $(HA^{2,\phi})^*$ tal que $f^N \to^* f$ y como $(HA^{2,\phi})^* \subseteq CMO^{2,\rho}$, entonces $f \in CMO^{2,\rho}$, y además

$$\|f\|_{\mathrm{CMO}^{2,\rho}} \leq C \left\|\{a_{j,k}\}\right\|_{CV^{2,\rho}} \ ,$$

$CMO^{2,\rho}$ y su predual

Se probó la relación $\left(HA^{2,\phi}\right)^{*} \subseteq \mathrm{CMO}^{2,\rho}$.
La definición de átomos que se utilizó para identificar el conjunto de funciones de $HA^{2,\phi}$ que admite descomposición atómica es:

Definición

Dada una función ϕ no negativa, creciente, cóncava y de tipo inferior $l > 0$, se dice que a es un $(2, \phi)$-átomo central si se satisfacen las condiciones:

1. $\mathrm{sop}\, a \subset I$; $I = [-R, R]$, con $R > 0$,
2. $\int a(x)dx = 0$,
3. $\|a\|_{L^2} \leq |I|^{\frac{1}{2}} \phi^{-1}\left(\frac{1}{|I|}\right)$.

$(HA^{2,\phi})^* \subseteq CMO^{2,\rho}$

Teorema

Sea ρ es una función no negativa, no decreciente y del tipo superior α ($\alpha > 0$). Para la función ϕ definida por $\phi^{-1}(\frac{1}{t}) = \frac{1}{t\rho(t)}$ se tiene que:
Si $L \in \left(HA^{2,\phi}\right)^*$, entonces existe una única $f \in CMO^{2,\rho}$ tal que

$$L(g) = \int f(x)\, g(x)\, dx, \text{ para cualquier } g \in L_0^\infty.$$

Más aún, $\|f\|_{CMO^{2,\rho}} \leq C\,\|L\|$, donde $\|\ \|$ es la norma estándar del operador.

Muchas gracias!